Intuicjonizm *vs* Platonizm.

Na przykładzie lematu Königa

Adam Olszewski

UPJPII Kraków

Copernicus Center Kraków

W niniejszym artykule chciałbym rozważyć tytułowe zagadnienie. Ponieważ ma ono charakter bardzo ogólny i przez to trudno dojść do uzasadnionych konkluzji, postanowiłem ten ogólny problem przestawić w postaci tzw. *case study*.

W tej pracy zakładam dla uproszczenia, iż filozofią matematyki klasycznej (lub matematyki oficjalnej) jest platonizm.[1] Główną tezę pracy można sformułować następująco: matematyka (i filozofia) intuicjonistyczna nie jest sprzeczna z matematyką (i filozofią) klasyczną, lecz są *kompatybilne*.[2]

Plan jest następujący: najpierw sformułuję pogląd, który krytykuję, następnie pokażę sposób w jaki matematyka klasyczna (dalej skrót MKL) dochodzi do lematu Königa, później pokażę w jaki sposób dochodzi matematyka intuicjonistyczna (dalej MINT) do sformułowania twierdzenia o wachlarzu, na koniec na przykładzie tych twierdzeń spróbuję zrealizować (przynajmniej częściowo) tezę główną referatu.

1. Skąd bierze się obiegowe przekonanie, ze pomiędzy MKL i MINT zachodzi sprzeczność. Troelstra i van Dalen uważają, że jest to wynikiem zbytniego wyeksponowania tzw. *słabych kontrprzykładów* (*weak counterexamples*) Brouwera (1908). Owe przykłady miały za zadanie pokazać ograniczone

---

[1] Pewna charakterystyka tego terminu, jak i intuicjonizmu zostanie częściowo dokonana w dalszej części, choć zakładam, ze Czytelnik dysponuje jakimś ich rozumieniem.

[2] Niech *kompatybilne* znaczy *zdolne do współpracy* w sensie, który powinien stać się jasny na podstawie dalszych rozważań.

zastosowanie niektórych reguł logiki klasycznej, na przykład prawa wyłączonego środka. Uważam jednak, że istnieje uproszczone wnioskowanie, które ma dodatkowo uzasadniać wspomnianą sprzeczność. Oto jego zarys:

- Matematyka jest jedna.
- Matematyka posiada jedną metodę.
- Matematyka posiada jeden zbiór zdań prawdziwych (oznaczmy go symbolem Dow).
- Istnieje zdanie matematyczne A, mające następujące cechy:

a) Niektórzy matematycy (MKL) sądzą, że A posiada dowód.
b) Niektórzy matematycy (MINT) sądzą, że A nie posiada dowodu.
c) Owym zdaniem jest lemat Königa.[3]

Zatem: A jest elementem Dow i równocześnie A nie jest elementem Dow.

2. Przytoczę obecnie dwa sposoby prowadzące do sformułowania lematu Königa w MKL. Poprzedzę je paroma uwagami natury historycznej. Autorem lematu jest Dénes Kőnig ur. 21 września 1884 w Budapeszcie, Węgry; zm. 19 października 1944 w Budapeszcie. Był synem matematyka Gyula (Juliusa) Kőniga (1849-1913). Lemat opublikował w pracy *Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche,* **Acta Litt. Ac. Sci. Hung. Franz Josep.**, 3(1927) ss. 121-130. Jest autorem książki 'Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen: Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe', Leipzig, Akad. Verlag 1936, która uchodzi za pierwszy w historii matematyki podręcznik z teorii grafów.[4]

2.1 Pierwszy sposób:

---

[3] Dodatkowym smaku dodaje to, że matematycy MINT uznają inne zdanie, które z punktu widzenia MKL jest równoważne zdaniu A.

[4] Jak widać piszę różnie nazwisko autora lematu. Jest to spowodowane pewnym zwyczajem. Mianowicie przyjęto, że w jego nazwisku po literze *K* występuje tzw. niemieckie *o* umlaut. Ponieważ był on Węgrem nad literką *o* powinien być podwójny akcent, jak pokazałem. Dostosuję się jednak w dalszej części pracy do zwyczaju.

DRZEWO T = ⟨U; R⟩ **:=** zbiór U wraz z relacją binarną R określoną w U, gdy spełnione są następujące własności

- R jest relacją częściowego porządku (zwrotna, przechodnia, słabo antysymetryczna),
- w U istnieje element najmniejszy względem R.
- Zbiór G_x = {y: yRx} jest dobrze uporządkowany przez relację R, dla dowolnego x.[5]

DF. **GAŁĄŹ DRZEWA** T **:=** zbiór X ⊂ U dobrze uporządkowany przez R taki, że nie istnieje zbiór dobrze uporządkowany w T zawierający X jako swój podzbiór właściwy.

Niech dane będzie drzewo T = ⟨U; R⟩.
DF. **Punktem** drzewa T nazywamy element zbioru U.
DF. Gdy xRy oraz nie istnieje taki punkt z, że xRz oraz zRy, to element y nazywamy **bezpośrednim następnikiem** punktu x, zaś x -- **bezpośrednim poprzednikiem** y.

Z definicji drzewa widać, że dany punkt x może mieć więcej niż jeden bezpośredni następnik, ale tylko jeden bezpośredni poprzednik.

DF. Punkt y drzewa nazwiemy **następnikiem** punktu x wtw gdy xRy.

Dany punkt drzewa może mieć wiele następników. Zatem szczególnym przypadkiem następnika jakiegoś jest bezpośredni następnik.

[5] Ogólniejsze pojęcie teoriomnogościowe można znaleźć na przykład w Kuratowski, Mostowski, ss. 303-304. Piszą oni, że „[n]iełatwo jest wskazać źródło tego pojęcia”.

DF **Przodkiem drzewa** T nazywamy punkt drzewa T, który nie posiada bezpośredniego poprzednika. W drzewie przodek jest elementem najmniejszym względem relacji R i jest tylko jeden.
DF. Drzewo nazywamy **drzewem dwójkowym,** gdy dowolny punkt posiada co najwyżej dwa bezpośrednie następniki.
DF. **Punkt końcowy.** Punkt drzewa T nie posiadający żadnego bezpośredniego następnika nazywamy **punktem końcowym** drzewa T.

DF. **Poziom drzewa**. Jeśli T jest dowolnym drzewem z przodkiem A, to można zdefiniować **poziomy** drzewa T, którymi są podzbiory U. **Poziom 1** = {A}. **Poziom N+1** tworzą wszystkie bezpośrednie następniki wszystkich punktów **poziomu N**.

Korzyścią bezpośrednią z definicji poziomów drzewa jest możliwość dowodzenia twierdzeń o drzewach przez indukcję 'biegnącą' po poziomach drzewa.
DF. **Drzewo skończone**. Drzewo T nazywamy **drzewem skończonym**, gdy zbiór wszystkich punktów drzewa T jest zbiorem skończonym.

DF. **Drzewo nieskończone**. Gdy zbiór wszystkich punktów drzewa T jest zbiorem nieskończonym, to drzewo T nazywamy **drzewem nieskończonym.**

Termin **nieskończon**y w odniesieniu do zbiorów jest różnie definiowane. [6]
DF. Symbolem |X|, gdy X jest zbiorem, oznaczamy liczność (liczbę elementów) zbioru X i nazywamy **liczbą kardynalną** zbioru X.
DF. Zbiór X nazywamy **skończonym,** gdy istnieje takie $i \in N$, że $|X|=i$.
DF. Zbiór X nazywamy **nieskończonym**, gdy nie jest skończony.[7]

[6] Por. Kuratowski, Mostowski ss. 111-115.
[7] Porównaj odcinek 4 niniejszej pracy. Intuicjonistycznie nie jest tak.

DF. Zbiór X nazywamy **nieskończonym w sensie Dedekinda** gdy X zawiera podzbiór Y taki, że ciąg f: N $\rightarrow$ Y jest różnowartościowy.[8]

Z teorii mnogości (wraz z aksjomatem wyboru) wiadomo, że oba pojęcia nieskończoności są równoważne. Dokładniej pewnika wyboru wymaga przejście od zbioru nieskończonego do zbioru nieskończonego w sensie Dedekinda.[9]

DF. Zbiór X nazywamy **przeliczalnie nieskończonym,** gdy istnieje bijekcja f: N $\rightarrow$ X. Mówiąc inaczej zbiór X jest przeliczalnie nieskończony gdy jest równoliczny ze zbiorem N, tzn. gdy, |X| = |N|.

Istnienie zbioru nieskończonego gwarantuje w teorii mnogości *aksjomat nieskończoności*

$$\exists x\ [\varnothing \in x \wedge \forall y\ (y \in x \rightarrow (y \cap \{y\} \in x))]\ .$$

UWAGA. Od teraz, jeśli nie zostanie to inaczej zaznaczone, pisząc *zbiór nieskończony* będziemy rozumieli *zbiór przeliczalnie nieskończony* w sensie klasycznym.

DF. Drzewo T nazywamy **skończenie generowalnym**, gdy każdy punkt drzewa T ma tylko skończenie wiele bezpośrednich następników.

2.2 Sposób drugi na wprowadzenie pojęcia drzewa:

Pojęcie drzewa można wprowadzić wychodząc od pojęcia grafu.

DF. *Grafem* **nieskierowanym** nazywamy zbiór punktów (zwanych *wierzchołkami*) wraz z odcinkami (zwanymi *krawędziami*) łączącymi niektóre z wierzchołków.

---

[8] Ktoś kto zna prace Dedekinda nie będzie zadowolony z tej definicji. Ściśle rzecz biorąc definicja nieskończoności Dedekinda nie odwołuje się do zbioru N.

[9] Por. Kuratowski, Mostowski 114-115.

DF. *Grafem* **oznakowanym** nazywamy graf, w którym wierzchołki (i krawędzie) są specjalnie oznaczone.
DF. **Ścieżką** grafu nazywamy ciąg wierzchołków grafu połączonych krawędziami.
DF. **Cyklem** grafu nazywamy ścieżkę tego grafu, której pierwszy i ostatni wierzchołek są identyczne.
DF. Cykl grafu nazywamy **prostym** gdy zawiera co najmniej trzy wierzchołki i żaden wierzchołek nie występuje w nim więcej niż raz, oprócz wierzchołka pierwszego i ostatniego. DF. Graf nazywamy **spójnym** gdy dowolne jego dwa wierzchołki są połączone ścieżką.
DF. **Drzewo** := graf spójny, bez cykli prostych**.**

Zachodzi następujące twierdzenie, zwane lematem Königa:

Lemat Königa

Każde drzewo $T = \langle U; R \rangle$, które jest nieskończone (przeliczalnie) i skończenie generowalne, ma gałąź nieskończoną.

Dowód:[10]

(1) Symbolem N_x oznaczmy zbiór wszystkich następników (niekoniecznie bezpośrednich) punktu x drzewa T.

(2) Punkt x drzewa T nazywamy dobrym wtw $|N_x| = |N|$. Punkt x drzewa T nazywamy złym, gdy nie jest dobry tzn. $|N_x| = k$, dla pewnego $k \in N$.

(3) Przodek s_0 drzewa T jest dobry, bo $|U| = |N|$ i zatem $|N_{s0}| = |N|$.

(4) (*) Jeśli dowolny punkt x drzewa T jest dobry, to istnieje jego bezpośredni, dobry następnik. Niech wszystkimi bezpośrednimi następnikami x będą punkty $y_1, y_2, ..., y_n$. Jest ich skończenie wiele, co wynika ze skończonej generowalności drzewa. Gdyby wszystkie te punkty były złe, to wtedy zbiór punktów drzewa

[10] Dowód za Smullyanem i Königiem. Por. [Smullyan 1995; 32].

$(...(N_{y1} \cup N_{y2})\cup ... \cup N_{yk})$ byłby skończony (bo skończona suma zbiorów skończonych jest zbiorem skończonym). Wtedy jednak punkt x nie byłby dobry lecz zły.

(5) Budujemy teraz indukcyjnie ciąg G (gałąź) punktów drzewa: s_0 – przodek drzewa. Jeśli ciąg (gałąź) jest skonstruowany do punktu s_{k}, to bierzemy dobry następnik punktu s_k (taki punkt istnieje na mocy (4)) i dołączamy do budowanego ciągu G jako s_{k+1}.

(6) Ciąg G jest nieskończony, bo w przeciwnym razie jakiś punkt drzewa nie miałby bezpośredniego, dobrego następnika (niezgodne z (4)) lub całe drzewo byłoby skończone (niezgodne z założeniami). □

Jako ciekawostkę przytaczam definicję drzewa, którą podaje Smullyan:[11]

Drzewem T nazywamy kolekcję następujących obiektów:

1. Zbiór X, którego elementy nazywamy *punktami*,
2. Funkcja *f*, która każdemu punktowi *x* przyporządkowuje liczbę dodatnią *f*(*x*) zwaną *poziomem x*-a,
3. Relacja binarna *xRy* określona w X, którą czytamy „*x* jest poprzednikiem *y*" lub „*y* jest następnikiem *x*". Relacja *R* musi spełniać następujące warunki:
   - istnieje jedyny punkt a_1 o poziomie 1, który nazywamy przodkiem drzewa,
   - każdy punkt różny od przodka ma jedyny poprzednik,
   - dla dowolnych punktów *x, y*: jeśli *y* jest następnikiem *x*,

   to $f(y) = f(x) + 1$.□

Inne wersje Lematu:

[11] Por. Smullyan 1995, s.3. Smullyan nazywa to drzewo nieuporządkowanym. Pominę obecnie ta kwestię.

- dla skończenie generowalnego, nieskończonego drzewa *T*: jeśli dla każdego *k* istnieje przynajmniej jeden punkt drzewa poziomu *k*, to drzewo musi zawierać przynajmniej jedną nieskończoną gałąź.

- dla skończenie generowalnego drzewa *T*: jeśli każda gałąź jest skończona, to istnieje ograniczenie górne na długości gałęzi drzewa.[12]

- dla skończenie generowalnego, nieskończonego drzewa *T*: jeśli nie istnieje skończone ograniczenie górne na długości gałęzi drzewa, to istnieje co najmniej jedna gałąź nieskończona.

3. Przejdźmy teraz do intuicjonistycznej charakterystyki drzewa. Obecnie ograniczymy naszą uwagę do drzew binarnych, czyli mowa będzie o ciągach zero-jedynkowych. Drzewo binarne jest poddrzewem pełnego drzewa binarnego, które ma dwa następniki dla każdego punktu.[13] Następujący ciąg definicji doprowadzi nas do twierdzenia o wachlarzu:[14]

a) Oznaczenia:

- $\{0, 1\}^*$ - zbiór wszystkich skończonych ciągów binarnych oznaczanych n, m, p.
- $|n|$ - długość ciągu n.[15]
- $n*m$ - konkatenacja n i m tzn., że jeśli $n = (n(0),..., n(l-1))$ i $m = (m(0),..., m(k-1))$, wtedy $n*m = (n(0),..., n(l-1), m(0),..., m(k-1))$, gdzie $k, l \in \mathrm{N}$.
- jeśli $i \in \{0, 1\}$, to $n*i$ oznacza $n*(i)$ oraz $i*n$ oznacza $(i)*n$.
- α, β --- oznaczają nieskończone ciągi binarne.

[12] Porównaj tę wersję z wersją twierdzenia o wachlarzu poniżej.
[13] Jest chyba jakiś problem ze zrozumieniem intuicjonistycznego pojęcia drzewa. Na przykład Dummett w ogólnie w tej partii rozważań nie definiuje pojęcia drzewa w przeciwieństwie do Troelstra, van Dalen.
[14] Por. Berger, ss. 2-5.
[15] Należy zwrócić uwagę na to, by rozróżnić tę funkcję od liczby kardynalnej.

- $\underline{\alpha}k := (\alpha(0),..., \alpha(k-1))$.

b) Definicje:

DF. Podzbiór X zbioru {0, 1}* jest **odrywalny** (**detachable**) jeśli istnieje funkcja

$f: \{0, 1\}^* \rightarrow N$ taka, że: $\forall n\ (n \in X \equiv f(n) = 0)$;[16]

DF. Podzbiór X zbioru {0, 1}* jest **domknięty na ograniczenia** gdy $\forall n, m\ (n{*}m \in X \rightarrow$

$n \in X)$;

DF. Podzbiór X zbioru {0, 1}* jest **nieskończonym drzewem** jeśli jest: *odrywalny, domknięty na ograniczenia* i spełnia warunek $\forall k\ \exists n\ (|n| = k \wedge n \in X)$;

DF. Podzbiór X zbioru {0, 1}* jest **rozprzestrzenieniem** (**spread**) jeśli $(\ ) \in X$[17] oraz

$\forall n\ (n \in X \rightarrow \exists i \in \{0, 1\}\ (n{*}i \in X))$.

DF. Ciąg α jest **nieskończoną ścieżką** zbioru X jeśli $\forall k\ (\underline{\alpha}k \in X)$.

DF. Jeśli Y jest *odrywalnym* podzbiorem Y zbioru {0, 1}* to powiemy, że jest **zamknięty na rozszerzenia** gdy $\forall n, m\ (n \in Y \rightarrow n{*}m \in Y)$;

DF. *Odrywalny* podzbiór Y zbioru {0, 1}* nazywamy **sztabą** (**bar**) jeśli: $\forall \alpha\ \exists k\ (\underline{\alpha}k \in Y)$;

DF. *Sztaba* jest **uniwersalną sztabą** jeśli: $\exists l\ \forall \alpha \exists k \leq l\ (\underline{\alpha}k \in Y)$.

DF. **Wachlarz** jest skończenie generowalnym rozprzestrzenieniem (*finitely branching spread*) tzn. rozprzestrzenienie X jest *wachlarzem*, jeśli spełnia warunek

$\forall n\ \varepsilon\ X\ \exists k\ \forall i\ (n{*}i \in X \rightarrow i \leq k)$.□

[16] Inna postać odrywalności zbioru X: $\forall n\ (n \in X \vee n \notin X)$.

[17] Ciąg pusty jest elementem rozprzestrzenienia.

Twierdzenie o wachlarzu (Fan Theorem - FT)

Dla dowolnej sztaby Y wachlarza X: każda sztaba Y jest sztabą uniwersalną wachlarza X.[18]□

Inne wersje[19] twierdzenia o wachlarzu:

- (ogólniejsze dla dowolnych ciągów[20]) Jeśli X jest wachlarzem i dla każdej nieskończonej ścieżki α w X istnieje początkowy ciąg $\underline{\alpha}k$ spełniający rozstrzygalną własność A, to istnieje jednorodne ograniczenie górne na rozważane k.[21] Symbolicznie: $\forall n\ (An \vee \neg An) \wedge \forall\alpha\ \exists l\ A(\underline{\alpha}l) \rightarrow \exists k\ \forall\alpha\ \exists i\leq k\ A(\underline{\alpha}i)$.
- Wersja ogólniejsza bez warunku odrywalności: $\forall\alpha\ \exists l\ A(\underline{\alpha}l) \rightarrow \exists k\ \forall\alpha\ \exists i\leq k\ A(\underline{\alpha}i)$.
- Jeszcze ogólniejsza wersja: fan(X) $\wedge\ \forall\alpha\ \exists l\ A(\alpha, l) \rightarrow \exists k\ \forall\alpha\ \exists i\leq k\ A(\alpha, i)$, gdzie fan(X) w sposób formalny wyraża to, że X jest wachlarzem. Ta wersja nie jest klasycznie prawdziwa.[22]
- Intuicyjnie FT jest kontrapozycją lematu Königa: jeśli każda gałąź skończenie generowalnego drzewa jest skończona, to drzewo jest skończone.

Ogólnie należy stwierdzić, że intuicjoniści nie ułatwiają zadania badaczom chcącym się zapoznać z intuicjonistycznymi wynikami. Wedle mojego osobistego doświadczenia, a nie jestem matematykiem, różni autorzy w różny sposób przedstawiają niektóre problemy w obrębie intuicjonizmu. Dlatego niekiedy dla kogoś, kto się z intuicjonizmem spotyka po raz pierwszy, trudno

---

[18] Zob. Berger, s 5.

[19] W tym przypadku nie są one równoważne z powyżej sformułowaną wersją o sztabie. Por. Troelstra, van Dalen ss. 217-220. Te wersje są wg. intuicjonistów klasycznie akceptowalne. Istnieją jednak wersje Fan Theorem, które nie są klasycznie akceptowalne, por. Beeson, s. 51, przypis 6 oraz Troelstra, van Dalen ss. 218-219.

[20] Por. Troelstra, van Dalen ss. 217-218.

[21] Ta wersja dla dowolnych ciągów liczb jest klasycznie równoważna z wcześniej sformułowaną wersją lematu Königa. Dowód w jedna stronę podają Troelstra, van Dalen s. 218.

[22] Zob. Troelstra, van Dalen s. 219. Kwantyfikuje się po elementach drzewa i po ścieżkach.

jest stwierdzić równoważność pewnych prezentacji. Status Fan Theorem jest w intuicjonizmie dość szczególny. Brouwer potrzebował takiego twierdzenia do zbudowania swojej teorii kontinuum. Jak zauważa Beeson Fan Theorem wynika z Bar Induction Bouwera, dlatego właśnie nazwany jest twierdzeniem, a jako pierwszy dowiódł go S. Kleene.[23] Jednak status Bar Induction nie jest zbyt jasny, gdyż jej dowód nie jest powszechnie akceptowany. Czasem twierdzenie o wachlarzu jest traktowane jako nieklasyczny aksjomat intuicjonizmu (konstruktywizmu).[24]

Intuicjoniści rozważają słabszą wersję lematu Königa tzw. Weak König's Lemma (WKL) ograniczoną do drzew binarnych o postaci:[25]

Weak König's Lemma (WKL)

Każde nieskończone drzewo binarne ma nieskończoną ścieżkę.[26]□

Istnieje pewna zasada, zwana **Lesser Limited Principle of Omniscience (LLOP)** o postaci:

Dla dowolnego ciągu binarnego (a_1, a_2, a_3, ...) w którym co najwyżej jeden element równy jest 1, to albo $a_k = 0$ dla wszystkich parzystych *k* albo $a_k = 0$ dla wszystkich nieparzystych *k*.

Zasada ta opiera się na prawie wyłączonego środka przez co nie jest akceptowalna intuicjonistycznie. Zachodzi następujący fakt:

WKL implikuje LLOP.□

[23] Por. Beeson, s. 51. Istotą twierdzenia o wachlarzu ma być to, że nie wszystkie ciągi wyborów (*choice sequences*) są rekurencyjne. Z tego powodu FT jest sprzeczny z Tezą Churcha w rozumieniu intuicjonistycznym.

[24] Taki przypadek rozważają Troelstra, van Dalen.

[25] Przejście do drzew binarnych w istocie nie ogranicza rozważań. Por. Troelstra, van Dalen ss. 219-220.

[26] Równoważna wersja, którą rozważają intuicjoniści: Każde poddrzewo pełnego drzewa binarnego, które nie jest jednorodnie ograniczone, posiada gałąź nieskończoną. Por. także Kuratowski, Mostowski s. 312.

Dowód: (Bridges)

Niech $\{a_k\}_{k\geq 1}$ będzie ciągiem binarnym w którym co najmniej jeden element jest równy 1. Definiujemy drzewo *T*: Przodek należy do drzewa *T*. Dla dowolnej liczby naturalnej *k*, jeśli $a_l = 0$ dla wszystkich $l \leq k$, to $\alpha(k) = 0$ oraz $\beta(k) = 1$. Jeśli zaś $a_k = 1$ i *k* jest parzyste, to dla każdego $l \geq k$, $\alpha(l) = 0$ i $\beta(l)$ jest niezdefiniowane: jeśli zaś $a_k = 1$ oraz *k* jest nieparzyste, to dla każdego $l \geq k$, $\alpha(l)$ jest niezdefiniowane i $\beta(l) = 1$. Drzewo *T* jest skończenie generowalne i nieskończone. Załóżmy, że posiada gałąź nieskończoną. Jeśli tą gałęzią jest α, to $a_k = 0$ dla wszystkich nieparzystych *k*; jeśli tą gałęzią będzie β, to $a_k = 0$ dla wszystkich parzystych *k*.□

Dla drzew binarnych część dowodu lematu Königa oznaczona gwiazdką jest (wg. intuicjonistów) niepoprawna.[27] Nie jest tak z tego powodu, ze użyto rozumowania niewprost. Intuicjoniści akceptują niektóre rozumowania niewprost np. uznają, że jeśli „A prowadzi do sprzeczności", to „A jest fałszywe". Natomiast nie uznają, że z "¬A prowadzi do sprzeczności" wynika logicznie „A jest prawdziwe". Raczej w dowodzie WKL niepokoi ich dychotomia postaci „lewa gałąź drzewa jest nieskończona lub prawa gałąź drzewa jest nieskończona".[28] Przyjęcie tej dychotomii mogłoby (wg. intuicjonistów) skutkować rozstrzygnięciem problemu stopu.[29]

Przedstawione stanowisko odnośnie do lematu Königa i twierdzenia o wachlarzu pochodzą z książek napisanych w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego stulecia. Co najmniej od roku 2005 działa grupa intuicjonistów do której zaliczają się między innymi J. Berger, H. Ishihara, P. Schuster, D. Bridges, H Schwichtenberg, którzy badają FT i WKL w obrębie tzw. *constructive reverse mathematics*. Ich badania doprowadziły do wielu

---

[27] Zob. strona 5.

[28] Ta uwaga odnosi się do dowodu wersji WKL z przypisu 26 niniejszej pracy. To sformułowanie podają intuicjoniści. Analogiczne sformułowanie znajdujemy w Kuratowski, Mostowski 312-315.

[29] Można przeszukać zbiór nieskończony.

interesujących rezultatów. Jednym z nich jest to, że Fan Theorem jest konstruktywnie równoważny pewnej słabszej wersji WKL.[30]

4. Dysponując powyższym materiałem przejdziemy obecnie do próby argumentacji za główną tezą pracy. Hilbert podał schemat aksjomatów podmiotu matematycznego i uważał, że badania nad nim należą do filozofii a nie matematyki.[31] Aksjomat przedstawiam w rozbiciu na segmenty:[32]

AH1 Ja myślę.

AH2 Myślę rzeczy (lub o rzeczach).

AH3 Za pomocą (prostych) znaków mogę:

- oznaczać nimi pomyślane rzeczy,
- rozpoznawać ponownie uczynione znaki,
- dobierać znaki w sposób (do)wolny.

AH4 Prawa operowania pojęciami rzeczy i operowania znakami mogę opisać zupełnie.

AH5 Mam zdolność samorefleksji.

Dlatego nazywam go schematem, gdyż większość terminów w nim występujących ma intuicyjne znaczenie.[33] Doprecyzowanie przynajmniej niektórych z nich pozwoli na uzyskanie kilku charakterystyk odmiennych podmiotów mogących uprawiać matematykę. Szczególnie jeśli doprecyzujemy terminy *myślę* oraz *rzeczy*, to uzyskamy interesujący rezultat. Zazwyczaj pośród różnic pomiędzy platonizmem, jako filozofią matematyki klasycznej

[30] Por. artykuł Schwichtenberga.

[31] Hilbert podał schemat aksjomatów podmiotu matematycznego i uważał, że badania nad nim należą do filozofii a nie matematyki w nieopublikowanym wykładzie pt. *Logische Prinzipien des mathematischen Denkens* z 1905 r., zanotowanym przez Ernsta Hellingera i M. Borna.

[32] Hilbert sformułował ten aksjomat. Nazywał go aksjomat *aksjomatem istnienia Inteligencji*. Zwróćmy uwagę na to, że Hilbert (nazywając go aksjomatem) musiał dopuszczać możliwość jakiegoś wnioskowania na jego podstawie.

[33] Mówiąc o schemacie mam coś innego na myśli niż np. schematy aksjomatów w logice. J. Dadaczyński zwrócił moją uwagę na to, że aksjomat ten Hilbert przejął prawdopodobnie od G. Veronese. Dadaczyński zaproponował by badania nad tym aksjomatem (i pokrewne) nazywać *protomatematyką*.

(oficjalnej), a intuicjonizmem jako filozofią matematyki intuicjonistycznej wymienia się następujące:

- odmienne *uniwersum dyskursu*[34]: dla platonizmu są to obiekty abstrakcyjne (poza- czasowe, poza-przestrzenne, poza-mentalne), zaś dla intuicjonizmu są to konstrukcje podmiotu (mentalne i przynajmniej niektóre z nich nie są poza-czasowe);
- odmienna logika: odpowiednio klasyczna i intuicjonistyczna, co skutkuje odmiennym pojęciem dowodu; prawa logiki są tutaj rozumiane jako prawa myślenia;
- odmienne pojęcie prawdy w platonizmie obowiązuje definicja korespondencyjna prawdy (zdanie jest prawdziwe jeśli zgodne z rzeczywistością), zaś w intuicjonizmie obowiązuje kryterialna definicja prawdy (zdanie jest prawdziwe jeśli istnieje konstrukcja będąca jego dowodem);[35]
- odmienne pojęcie nieskończoności: odpowiednio aktualna w platonizmie (potencjalna również), w intuicjonizmie tylko potencjalna.

Mamy zatem dwie bardziej szczegółowe wersje schematu Hilberta:

a) Podmiot klasyczny.

AHK1 Ja myślę.

AHK2 Myślę o obiektach abstrakcyjnych. Prawa mojego myślenia koduje logika klasyczna.

AHK3 Za pomocą (prostych) znaków mogę i muszę:

- oznaczać nimi obiekty abstrakcyjne,
- rozpoznawać ponownie uczynione znaki,
- dobierać znaki w sposób (do)wolny.

---

[34] Uniwersum dyskursu rozumiane jest tutaj nietechnicznie jako to, *o czym się w teorii mówi*.

[35] Należy podkreślić to, że w konsekwencji zdania matematyczne klasycznie dzielą się na prawdziwe i fałszywe. Dowód jest jedynie kryterium prawdziwości pozwalającym zaliczyć dane zdanie do grupy prawdziwych. W intuicjonizmie posiadanie dowodu jest definicją prawdy i kryterium prawdy równocześnie.

AHK4 Praw operowania pojęciami rzeczy i operowania znakami nie mogę opisać zupełnie.[36]

AHK5 Mam zdolność samorefleksji.

b) Podmiot intuicjonistyczny.

AH1 Ja myślę to znaczy konstruuję.

AH2 Myślę o moich konstrukcjach. Prawa mojego myślenia opisuje logika intuicjonistyczna.

AH3 Za pomocą (prostych) znaków mogę:

- oznaczać nimi skonstruowane rzeczy,
- rozpoznawać ponownie uczynione znaki,
- dobierać znaki w sposób (do)wolny.

AH4 Praw operowania konstrukcjami i operowania znakami nie mogę opisać zupełnie.

AH5 Mam ograniczoną zdolność samorefleksji.[37]

Podsumowując ten fragment rozważań o podmiocie można wyciągnąć wniosek następujący: nie może być mowy o sprzeczności pomiędzy MKL i MINT, gdyż po prostu *mówią o czym innym*. Odmienne jest uniwersum dyskursu, gdyż na przykład obiekty badane przez intuicjonistów są konstrukcjami umysłu, zaś platońskie obiekty są poza-umysłowe. Po drugie obiekty matematyczne platońskie są poza-czasowe (czasem używa się angielskiego *omnitemporal*), podczas gdy według Brouwera żadne (czy przynajmniej niektóre) obiekty nie są *omnitemporal*.[38] Wydaje mi się to być prostym i ważnym spostrzeżeniem. Skutkuje to między innymi różnymi zbiorami twierdzeń tych matematyk (liczba mnoga!), a co za tym idzie fałszywa zdaje się być przesłanka pierwsza mówiąca o jednej matematyce i przesłanka

[36] Z powodu twierdzenia Gödla o niezupełności.

[37] Ograniczenie to wywodzi się stąd, że intuicjoniści mają np. kłopot z dowodem (za pomocą metod intuicjonistycznych) twierdzenia o pełności dla rachunku pierwszego rzędu.

[38] Kwestia sprecyzowania odmienności uniwersum wymaga doprecyzowania.

trzecia (rozumowania ze strony pierwszej). Pozostałe różnice są konsekwencjami faktu różnych uniwersów oraz sposobu docierania przez podmiot do obiektów uniwersum. Chciałbym się w tym miejscu zatrzymać dłużej na odmiennym sposobie rozumienia nieskończoności. W klasycznym i niektórych intuicjonistycznych sformułowaniach lematu Königa termin *nieskończony* pojawia się dwukrotnie, raz w odniesieniu do drzewa, raz w odniesieniu do gałęzi. Pojęcie odpowiadające temu terminowi jest różne w obu matematykach (i filozofiach leżących u ich podstaw). Owa różnica w rozumieniu właśnie wydaje się być przyczyną odrzucenia dowodu lematu Königa przez intuicjonistów. Mówiąc skrótowo i nieściśle, klasycznie można przejść od (aktualnie) nieskończonego drzewa do nieskończonej gałęzi, gdyż nieskończoność mamy zagwarantowaną założeniem występującym w lemacie, zaś intuicjonistycznie nieskończoność drzewa nie gwarantuje nieskończoności gałęzi.

Poniżej prezentuję główne cechy *nieskończoności* w obu filozofiach (i matematykach) i staram się podać ich zastosowanie do WKL .

[1] Ujęcie klasyczne nieskończoności:

- aktualna tzn. istniejąca jako *completed*: gwarantuje to aksjomat nieskończoności, założenie WKL gwarantuje istnienie aktualnie nieskończonego drzewa,
- podmiot „uchwytuje” nieskończoną strukturę jako obiekt dany równocześnie: „uchwytuję” nieskończone drzewo jako dane i gotowe,
- istnieją zbiory nieskończone dowolnej mocy,
- ciągi jako nieskończone obiekty są dane jako gotowe, nieskończona gałąź jest takim ciągiem, jest ona „konstruowana” (tak mówią czasem matematycy z obozu MKL) indukcyjnie, ale z pomocą aksjomatu wyboru, [39]

[39] Widać z tego, że klasycznie również można mówić o *konstruowaniu*.

- gotowa nieskończona struktura ma jako swe elementy obiekty abstrakcyjne tzn. nie-przestrzenne, nie-czasowe, nie-mentalne.

[2] Ujęcie intuicjonistyczne: [40]

- potencjalna tzn. nieukończona: drzewo jest w każdym momencie skończone, ale nieustannie rozbudowywane, podmiot „uchwytuje” proces, który generuje nieskończoną strukturę: „uchwytywanie” tego procesu jest pozyskaniem skończonego opisu,
- aby uznać, że proces generuje nieskończoną strukturę należy wykazać, że proces się nie skończy (*terminate*):
- gdy jakaś procedura się zakończy, to można mówić o istnieniu gotowej struktury i odróżnić ją od samej procedury: ani nieskończonego drzewa, ani nieskończonej gałęzi nie możemy odróżnić od procedur, które je generują,
- w danym momencie znamy tylko skończony segment struktury, którą proces generuje, elementy danych struktur są mentalnymi konstrukcjami.

Jak już wspomniano intuicjoniści nie twierdzą, że WKL jest fałszywy, jedynie odrzucają jego dowód. Uważają, że istnienie funkcji różnowartościowej ze zbioru N w X jest mocniejszym stwierdzeniem od tego, iż „X nie jest skończonym zbiorem”. Jeśli bowiem X nie jest skończony, to nie istnieje bijekcja z X na początkowy odcinek zbioru N dla pewnego *k*. Stąd jednak intuicjonistycznie nie wynika, iż X jest nieskończony, gdyż to znaczy, że istnieje funkcja różnowartościowa z N w X. W matematyce oficjalnej podstawą do uznania istnienia takiej funkcji jest często aksjomat wyboru – intuicjonistycznie odrzucany. Z taką sytuacją spotykamy się w przypadku dowodu lematu Königa. Intuicjonistycznie nie jest poprawne przejście od tego, że „nie jest tak, iż wszystkie gałęzie są skończone” do tego, że „istnieje gałąź nieskończona”.

[40] W niektórych sformułowaniach intuicjonistycznej teorii mnogości sformułowanie aksjomatu nieskończoności wygląda dokładnie tak samo jak w Kantorowskiej teorii mnogości. Ponieważ założono intuicjonistyczną logikę kwantyfikator egzystencjalny należy rozumieć konstruktywistycznie.

Zatem nawet jeśli użyjemy matematyki oficjalnej (tame mathematics) w dowodzie lematu Königa przejście od tego, że „nie jest tak, że wszystkie gałęzie drzewa są skończone”, do „jakaś gałąź jest nieskończona” wymaga użycia aksjomatu wyboru.

5. Przyjrzyjmy się pokrótce powyższej argumentacji. Najpierw przestawiłem krytykowane wnioskowanie, które prowadzi do konkluzji o sprzeczności pomiędzy MKL i MINT. Następnie pokazałem w jaki sposób do pojęcie drzewa i lematu Königa dochodzi MKL oraz jak do pojęcie drzewa i twierdzenia o wachlarzu dochodzi MINT. Te rozważania mają pokazać jak dalece znaczenia terminów użytych w sformułowaniu WKL różnią się w przypadku obu matematyk. Ważną konsekwencją takiego stanu rzeczy jest fałszywość pierwszej przesłanki wspomnianego wnioskowania mówiącej o jednej matematyce. Następnie poszukując głębszych różnic próbowałem pokazać, że MKL i MINT nie są sprzeczne z powodu różnych uniwersów dyskursu, a w szczególności różnicy w pojmowaniu nieskończoności. Również podmioty presuponowane przez obie matematyki są różne. Powyższa praca jest jedynie rodzajem anonsu, czy tez pierwszego przybliżenia, dotyczącego dalszych rozważań tych problemów. Zamierzam im poświęcić obszerniejszą rozprawę. Zdaję sobie sprawę, że wiele z nich wymaga gruntownego przemyślenia i dopracowania.

LITERATURA

[1] Berger J., *A Decomposition of Brouwer’s Fan Theorem*, **Journal of Logic & Analysis**, 1(6) (2009), 1-8.

[2] Beeson M.J., ‘Foundations of Constructive Mathematics’, Springer, Berlin 1985.

[3] Brouwer L.E.J., ‘Brouwer’s Cambridge Lectures on Intuitionsm’ ed. D. van Dalen, Cambridge 1981.

[4] Dummett M., ‘Elements of Intuitionsm’, Clarendon Press, Oxford 1077.
[5] Kleene S.C., *Recursive functions and intuitionistic mathematics*, Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., U.S.A., 1950), Amer Math. Soc., Providence, R. I., 1952, ss. 679-685
[6] Kuratowski K., Mostowski A., ‘Teoria mnogości’, PWN, Warszawa 1978.
[7] Schwichtenberg H., *Direct Proof of the Equivalence between Brouwer’s Fan Theorem and König’s Lemma with a Uniqueness Hypothesis*, **Journal of Universal Computer Science**, 11(12) (2005), 2086-2095
[8] Smullyan R., ‘First-Order Logic’, Dover 1995.
[9] Troelstra A.S., van Dalen D., ‘Constructivism in Mathematics’, t.1., North-Holland 1988.